Andalucía 2023

Problema 1.

(a) Se tienen *n+1* cajas idénticas con *n* bolas cada caja. En la primera caja hay *n* bolas negras; en la segunda caja hay *n-1* bolas negras y *1* bola blanca; en la tercera hay *n-2* bolas negras y *2* bolas blancas y así sucesivamente, hasta que, en la última caja, hay *n* bolas blancas. Se toma una caja al azar y de ella se extraen tres bolas de una vez.
(a-1) ***[4 puntos]*** Calcule la probabilidad de que las tres bolas sean blancas.
(a-2) ***[3 puntos]*** Suponiendo que, tras la extracción, las tres bolas son blancas, calcule el número de cajas que tiene que haber para que la probabilidad de que procedan las tres bolas blancas de las dos últimas cajas, sea igual a $\frac{2}{3}$.

(b) ***[3 puntos]*** Dos varillas, *AB*, *BC*, de igual longitud y articuladas en *B*, tienen fijo el extremo *A*. Si el extremo *C* se mueve sobre la recta *AC*, halle la ecuación del lugar geométrico de un punto *P*, tomado en *BC*.

Resolución:

Apartado (*a*)

(*a-1*) Sea: $A_i,\ 0 \le i \le n$, el suceso de tomar al azar la caja de lugar *i+1*, que contiene *i* bolas blancas.

X la variable aleatoria "numero de bolas blancas" de las tres extraídas simultáneamente.

Por el teorema de la probabilidad total se tiene que: $P(X=3) = \sum_{i=0}^{n} P(A_i).P(X=3\,|A_i)$

Teniendo en cuenta que $\forall i,\ P(A_i) = \frac{1}{n+1}$, y que $P(X=3|A_0) = P(X=3|A_1) = P(X=3|A_2) = 0$

$$P(X=3) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1}.P(X=3\mid A_i) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=3}^{n}\left[\frac{\binom{i}{3}}{\binom{n}{3}}\right] = \frac{\sum_{i=3}^{n}\binom{i}{3}}{(n+1)\binom{n}{3}} = \left\{\frac{3.2.1+4.3.2+\cdots+n(n-1)(n-2)}{(n+1)n(n-1)(n-2)}\right\} =$$

$$\underbrace{=}_{*}\frac{\binom{n+1}{4}}{(n+1)\binom{n}{3}} = \frac{\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}}{(n+1)\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}} = \frac{1}{4}$$

(*) Teniendo en cuenta que: $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

(***a-2***) Aplicando el teorema de Bayes: $P\big((A_{n-1}\cup A_n)\big|X=3\big) = \frac{P\left((A_{n-1}\cup A_n)\cap(X=3)\right)}{P(X=3)} =$

$$= \frac{\frac{1}{n+1}.\frac{\binom{n-1}{3}}{\binom{n}{3}}+\frac{1}{n+1}.1}{1/4} = \frac{4\left[\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)}+1\right]}{(n+1)} = \frac{4\left(\frac{n-3}{n}+1\right)}{(n+1)} = \frac{4(2n-3)}{n(n+1)} = \frac{2}{3}$$

Resolviendo: $24n - 36 = 2n^2 + 2n;\quad n^2 - 11n + 18 = 0;\quad n = \begin{cases}9\\2\end{cases}$

Solución: hay n+1=10 cajas. (tres cajas no puede ser porque sería imposible el haber obtenido 3 bolas blancas)

Si no se llegó al final de (a.1). $\boldsymbol{P}\left((\boldsymbol{A_{n-1}} \cup \boldsymbol{A_n}) \middle| X=3\right) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)+n(n-1)(n-2)}{3.2.1+4.3.2+\cdots+n(n-1)(n-2)}$

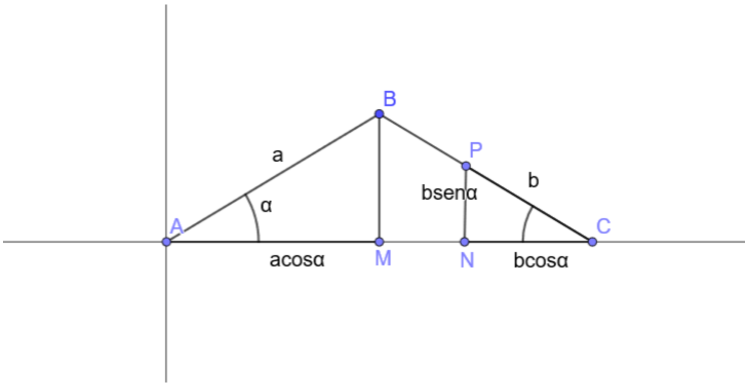
Dando valores a n se tiene: para n=9 que

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)+n(n-1)(n-2)}{3.2.1+4.3.2+\cdots+n(n-1)(n-2)} = \frac{336+504}{6+24+60+120+210+336+504} = \frac{840}{1260} = \frac{2}{3}$$

Por lo que el número total de cajas es 10

Apartado (*b*)

Situando el punto *A* en el origen de coordenadas, *A(0,0)*; el punto C sobre el eje de abscisas; y haciendo *a=longitud de las varillas, a=AB=BC, b=distancia del punto P a C, b=PC, 0<b<a.*



Llamando α al ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con la varilla *AB*; y a partir de los triángulos ABM, CNM y CPN de la figura, que las coordenadas de *P(x, y)* vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = AN = acos\alpha + (acos\alpha - bcos\alpha) = (2a-b)\cos\alpha \\ y = NP = bsen\alpha \end{cases}$$

valido para los cuatro cuadrantes, según se sitúe el punto variable C y el punto de articulación B.

despejando $\begin{cases} cos\alpha = \frac{x}{2a-b} \\ sen\alpha = \frac{y}{b} \end{cases}$, elevando al cuadrado y sumando las dos ecuaciones se obtiene:

$cos^2\alpha + sen^2\alpha = \left(\frac{x}{2a-b}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$ y simplificando: $\frac{x^2}{(2a-b)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Que corresponde a la ecuación de una elipse centrada en el origen de coordenadas y semiejes

2a-b y *b.*

Problema 2.

(a) En un establecimiento comercial, la salida diaria de cierto tipo de electrodomésticos viene descrita por una variable aleatoria X con soporte $D_X = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$. Se sabe que un $100a\%$ de los días, $a \in [0, 1]$, no se vende ningún aparato, mientras que la probabilidad de vender un número fijo de ellos, es directamente proporcional a ese número.

(a-1) ***[1 punto]*** Demuestre que se verifica $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

(a-2) ***[2,5 puntos]*** Calcule la ley de probabilidad asociada al fenómeno aleatorio descrito: función de masa de probabilidad y función de distribución.

(a-3) ***[1,5 puntos]*** Si el vendedor observa que, por término medio, cada mes (30 días) vende 1485 aparatos y el 90% de los días tiene alguna venta, ¿cuántos electrodomésticos puede vender, como máximo, cada día? ¿Cuál es esa probabilidad?

(b) ***[5 puntos]*** Halle el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje *OX*, la región del plano que resulta de la intersección del interior de $x^2 + y^2 = 17$ con el exterior de $x^2 + y^2 = 17x$

Resolución:

Apartado (*a*).

(*a-1*) Vamos a demostrar que: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ por inducción.

Para n=1 se tiene que: $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ por lo que es cierta la igualdad.

Supongamos cierta la igualdad para $n=k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$; para $n=k+1$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} =$$
$$\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

por lo que se verifica la identidad y por tanto la identidad es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$

(*a-2*) La función masa de probabilidad vendrá dada por:

$$f(x) = P[X = x] = \begin{cases} a & si\ x = 0 \\ k & si\ x = 1 \\ 2k & si\ x = 2 \\ \vdots & \vdots \\ nk & si\ x = n \end{cases} = \begin{cases} a & si\ x = 0 \\ kx & si\ x \in \{1,2,\dots,n\} \end{cases}$$

Con k la constante de proporcionalidad, a determinar.

Como: $\sum_{x \in D_X} P[X = x] = 1$ con $D_X = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$; se tiene que

$$a + k + 2k + \cdots + nk = a + k(1 + 2 + \dots + n) = a + k\frac{(1+n)n}{2} = 1, \qquad k = \frac{2(1-a)}{n(n+1)}$$

Y la función masa de probabilidad será:

$$f(x)=P[X=x]=\begin{cases} a & si\ x=0 \\ \frac{2(1-a)}{n(n+1)} & si\ x=1 \\ \frac{4(1-a)}{n(n+1)} & si\ x=2 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{2n(1-a)}{n(n+1)} & si\ x=n \end{cases} = \begin{cases} a & si\ x=0 \\ \frac{2x(1-a)}{n(n+1)} & si\ x\in\{1,2,\dots,n\} \end{cases}$$

La función de distribución viene dada por:

$$F(x)=P[X\le x]=\begin{cases} o & si\ x<0 \\ a & si\ 0\le x<1 \\ a+\dfrac{2(1-a)}{n(n+1)} & si\ 1\le x<2 \\ a+\dfrac{6(1-a)}{n(n+1)} & si\ 2\le x<3 \\ a+\dfrac{12(1-a)}{n(n+1)} & si\ 3\le x<4 \\ a+\dfrac{20(1-a)}{n(n+1)} & si\ 4\le x<5 \\ \vdots & \vdots \\ a+\dfrac{n(n+1)(1-a)}{n(n+1)}=1 & si\ x\ge\ n \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} o & si\ x<0 \\ a & si\ 0\le x<1 \\ a+\frac{k(k+1)(1-a)}{n(n+1)} & si\ k\le x<k+1\ con\ 1\le k<n \\ 1 & si\ x\ge\ n \end{cases}$$

(a-3) De que el 90% tiene alguna venta se deduce que *1-a=0.9 y a=0.1*

$$f(x)=P[X=x]=\begin{cases} 0.1 & si\ x=0 \\ \dfrac{1.8\,x}{n(n+1)} & si\ x\in\{1,2,\dots,n\} \end{cases}$$

Y el valor medio (esperanza) para las ventas diarias es: $E[X]=\frac{1485}{30}=49.5$

$$E[X]=\sum_{x=0}^{x=n} x\,f(x)=0+\sum_{x=1}^{x=n} x\,\frac{1.8\,x}{n(n+1)}=\sum_{x=1}^{x=n}\frac{1.8\,x^2}{n(n+1)}=\frac{1.8}{n(n+1)}\sum_{x=1}^{n} x^2$$

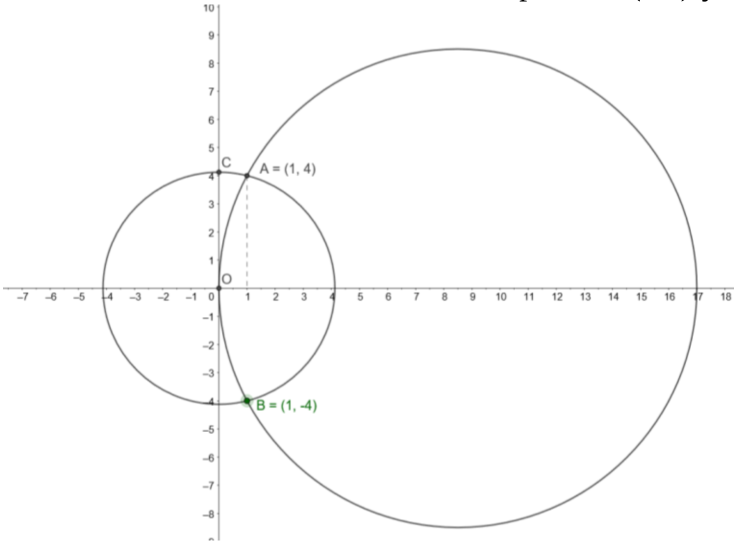
Y del resultado del apartado (a-1) se tiene: $E[X]=\frac{1.8}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=0.3(2n+1)=49.5$

De donde: *n=82* ***y*** $P(X=82)=\frac{1'8.82}{82(82+1)}=\frac{1'8}{83}=\frac{9}{415}$

Apartado (*b*):

Se trata de dos circunferencias: una $x^2 + y^2 = 17$, de centro en el origen de coordenadas y radio $\sqrt{17}$ y la otra $x^2 + y^2 = 17x$ de centro en el punto $\left(\frac{17}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{17}{2}$

Las dos circunferencias se cortan en los puntos *A(1,4)* y *B(1.-4)*.



El volumen pedido será el de la semiesfera obtenida por el giro del primer semicírculo, (la parte de abscisas negativas) más el volumen generado al girar alrededor del eje OX la superficie interior del triángulo mixtilíneo OCA de la figura adjunta,$O(0{,}0)$, $C\left(0, \sqrt{17}\right)$ y $A(1{,}4)$, formado por el segmento OC, del eje de ordenadas, la cuerda de la primera circunferencia CA y la cuerda OA de la segunda circunferencia.
El volumen generado al girar alrededor de eje de abscisas el recinto, limitado por la curva representativa de la función $y = f(x)$ y las ordenadas de los puntos extremos de abscisas $x = x_1$ y $x = x_2$, viene dado por $V = \pi \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 dx$, (integración por discos).
Para cuestión tratada se tiene: $y_1^2 = 17 - x^2$, $y_2^2 = 17x - x^2$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{17}\right)^3 + \pi \int_0^1 [y_1^2 - y_2^2] dx = \frac{34\pi\sqrt{17}}{3} + \pi \int_0^1 [(17 - x^2) - (17x - x^2)] dx =$$

$$= \frac{34\pi\sqrt{17}}{3} + \pi \int_0^1 (17 - 17x) dx = \frac{34\pi\sqrt{17}}{3} + \pi 17 \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{34\pi\sqrt{17}}{3} + \frac{17\pi}{2} =$$

$$= \frac{17\pi\left(4\sqrt{17} + 3\right)}{6} \; unidades\ de\ volumen.$$

Problema 3.

(c) ***[4 puntos]*** Calcule el límite de la sucesión definida por: $a_n = \frac{1 + 2.2! + \cdots + n.n!}{(n+1)!}$

(d) ***[6 puntos]*** Encuentre los valores de *x* para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{3^n\, n^2}$, es convergente.

***Resolución*:**

Apartado (*a*)

Nota: Criterio de Stolz para el cociente de dos sucesiones:

Si las sucesiones$\{a_n\}\ y\ \{b_n\}$ verifican una de las dos condiciones siguientes:

i) $\{b_n\}$ es monótona creciente con $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

ii) $\{b_n\}$ es monótona decreciente con $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, finito o infinito, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$

La sucesión $a_n = \frac{1 + 2.2! + \cdots + n.n!}{(n+1)!} = \frac{x_n}{y_n}$, Cociente de dos sucesiones verifica la primera condición del criterio de Stolz, $\{y_n\}$ es positiva, estrictamente creciente y no acotada, por lo que:

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{[1\ +\ 2.2!\ + \cdots +\ n.n! + (n+1)(n+1)!] - [1\ +\ 2.2!\ + \cdots +\ n.n!]}{(n+2)! - (n+1)!} =$$

$$= lim \frac{(n+1)(n+1)!}{(n+1)!(n+2-1)} = \lim 1 = 1. \text{ por lo que } \quad \lim\ a_n = lim\ \frac{1 + 2.2! + \cdots + n.n!}{(n+1)!} = 1$$

Apartado (b)

Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{3^n\, n^2}$ vamos ha estudiar su convergencia por el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \begin{cases} < 1, la\ serie\ converge\ (absolutamente) \\ > 1, la\ serie\ no\ converge\ (diverge) \\ = 1, caso\ dudoso, hay\ que\ estudiarlo \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{3^{n+1}\,(n+1)^2}}{\frac{(x+1)^n}{3^n\, n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2|x+1|}{3(n+1)^2} = \frac{|x+1|}{3}$$

Por lo que: $\begin{cases} |x+1| < 3, la\ serie\ converge \\ |x+1| > 3, la\ serie\ diverge \end{cases}$

Para $x = 2$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2+1)^n}{3^n\, n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, una serie numérica alternada cuyo termino general tiende a cero y por tanto es convergente.

Para $x = -4$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-4+1)^n}{3^n\, n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-3)^n}{3^n\, n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serie convergente por ser el exponente p, de la p-serie, mayor que 1.

Nota: La ***p*-serie** (o **serie de las p**) es cualquiera de las series del tipo: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ para *p* número real positivo. La serie es convergente si *p* > 1 y divergente en otro caso. Cuando *p* = 1, la serie es la serie armónica. Si *p* > 1, entonces la suma de la serie es ζ(*p*), es decir, la función zeta de Riemann evaluada en *p*.

Por lo que la serie, de este problema, converge $\forall x \in [-4,2]$

Problema 4.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ no nulo y para cada $a, b \in \mathbb{C}$ considere la matriz

$$A_n(a) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1+a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1+a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$$

Y el sistema de ecuaciones $A_n(a)\cdot X = (0,0,\dots,b)^t$ con $X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

(e) *[1 punto]* Calcule los siguientes determinantes: $\det(A_1(a))$, $\det(A_2(a))$, $\det(A_3(a))$.

(f) ***[1 punto]*** Obtenga una relación lineal entre los determinantes de $A_n(a)$, $A_{n+1}(a)$ y $A_{n+2}(a)$.

(g) ***[3 puntos]*** Halle, según los valores de a y *n*, una expresión para el determinante de $A_n(a)$.

(h) ***[5 puntos]*** Estudie el sistema $A_n(a)\cdot X = (0,0,\dots,b)^t$ según los valores de *a*, *n*, *b*.

Resolución:

Apartado (a).

$\det\big(A_1(a)\big) = 1+a$

$\det\big(A_2(a)\big) = (1+a)^2 - a = 1+a+a^2$

$\det\big(A_3(a)\big) = (1+a)^3 - -2a(1+a) = 1+a+a^2+a^3$

Apartado (b).

Desarrollando el $\det\big(A_{n+2}(a)\big)$ por los elementos de la primera columna:

$$\det\big(A_{n+2}(a)\big) = (1+a).det\big(A_{n+1}(a)\big) - a\ det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1+a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+a & 1 \\ 0 & 0 & \dots & a & 1+a \end{pmatrix}$$

Desarrollando el último determinante por los términos de la primera fila:

$$\det(A_{n+2}(a)) = (1+a).\,det(A_{n+1}(a)) - a.\,det\,(A_n(a))$$

Apartado (c). Por inducción vamos a demostrar que $\det(A_n(a)) = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$

Para el caso de *n=1*, *n=2 y n=3*, se ha visto la certeza en el apartado (a)

Supongamos cierto hasta para: $n = k+1$

$\det(A_k(a)) = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^k$

$\det(A_{k+1}(a)) = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^k + a^{k+1}$

Del apartado anterior se tiene:

$\det(A_{k+2}(a)) = (1+a).\,det(A_{k+1}(a)) - a.\,det\,(A_k(a))$=

$= (1+a)(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^k + a^{k+1}) - a(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^k\,) =$

$$= 1 + a + a^2 + \cdots + a^{k+1} + a^{k+2}$$

Y por tanto la expresión es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$

Apartado (d). Sea el sistema $A_n(a) \cdot X = (0, 0, \dots, b)^t$ se trata de un sistema cuadrado (tantas ecuaciones como incógnitas).

Del apartado anterior tenemos que: $\det(A_n(a)) = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$

Como $\det(A_n(1)) = n + 1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$; para $a \neq 1$ se puede escribir:

$\det(A_n(a)) = \frac{(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n)(1-a)}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, Para que $\det(A_n(a)) = 0 \iff 1 - a^{n+1} = 0$,

$$a = \sqrt[n+1]{1} = e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}, \qquad 1 \leq k \leq n+1$$

Nota: Tomando *k* primo con *n+1*, en particular, *k=1*, las sucesivas potencias de $a = \sqrt[n+1]{1} = e^{\frac{2\pi}{n+1}i}$ $\{a, a^2, a^3, \dots, a^n, a^{n+1} = 1\}$, constituyen el conjunto de las raíces n+1 de la unidad, y su suma es cero. $\det\left(A_n\left(e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\right)\right) = 0.$

Escribiendo: $B = (0, 0, \dots, b)^t$

1) Si $a \neq e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}$, $1 \leq k \leq n$, entonces $\det\left(A_n\left(e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\right)\right) \neq 0$ y el sistema es compatible determinado $\forall b \in \mathbb{C}$.

   $Rango\left(A_n\left(e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\right)\right) = n = Rango\left(A_n\left(e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\right) \lfloor B\right)$, (Matriz ampliada)

2) Si $a = e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}$, $1 \leq k \leq n$, entonces $\det\left(A_n\left(e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\right)\right) = 0$, pero $\det\left(A_{n-1}\left(e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\right)\right) \neq 0$ ya que $e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}$ no es una raíz n-ésima de 1. $Rango\left(A_n\left(e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\right)\right) = n-1$

2.1) Si *b=0*, el sistema es compatible e indeterminado (sistema homogéneo)

2.2) Si $b \neq 0$, Sustituyendo la última columna de $A_n(a)$ por la columna B de los términos independientes se tiene:

$$det\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1+a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \end{pmatrix} = b\det\left(A_{n-1}\left(e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\right)\right) \neq 0$$

Y el sistema es incompatible: Rango $\left(A_n\left(e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\right)\right) = n-1,\quad Rango\left(A_n\left(e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\right)\lfloor B\right) = n$

Problema 5.

(a) ***[4 puntos]*** Un grupo de alumnos de 1º de la ESO va a visitar las instalaciones deportivas de un equipo de baloncesto. Para dinamizar la visita, el club ha preparado una actividad para el alumnado. Sobre la cancha han colocado cierto número de pelotas de baloncesto. Si cada pelota dispuesta la toma un alumno distinto, quedarán *n* alumnos sin haber cogido ninguna pelota. Sin embargo, si se montan equipos de *n* alumnos alrededor de cada pelota dispuesta, quedarán libres *n* pelotas. ¿Cuántas pelotas ha dispuesto el equipo de baloncesto para organizar la actividad?

(b) Dada la función $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(b.1) ***[4,5 puntos]*** Represéntela.
(b.2) ***[1,5 puntos]*** Calcule, según el valor de $a \in \mathbb{R}$, el número de soluciones de la ecuación

$$x - a\ln x = 0$$

Resolución:

Apartado (a). Notaremos con *a=”número de alumnos”,* y con *p=”número de pelotas”*

Del enunciado se tiene que $\begin{cases} a = n + p \\ \frac{a}{n} + n = p \end{cases}$ con $a, p, n \in \mathbb{N}$, Sistema de ecuaciones diofánticas.

Sustituyendo se tiene $\frac{n+p}{n}+n=p$, de donde, $n+p+n^2=np$, $n^2+n=p(n-1)$ l que implica que $n\neq 1$, despejando p: $p=\frac{n^2+n}{n-1}=n+2+\frac{2}{n-1}$,

por lo que n=2 o n=3 en los demás casos $p\notin\mathbb{N}$.

Para: $n=2,\ p=6,\ a=8$; Para: $n=3,\ p=6,\ a=9$

En ambos casos el número de pelotas es 6.

Apartado (b).

(b.1) Estudio y representación de la función: $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

Dominio de *f* = $(0,1)\cup(1,+\infty)$, la función es continua y derivable en su dominio

Calculo los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1/x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{Lx}=0,$$

De lo que se deduce:

En $x=1$ La función tiene una discontinuidad asintótica de salto infinito.

La gráfica de la función posee una asíntota vertical (x=1) y no tiene asíntota horizontal ni oblicua.

Si $x\in(0,1)\Rightarrow f(x)<0$, $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f(x)>0$

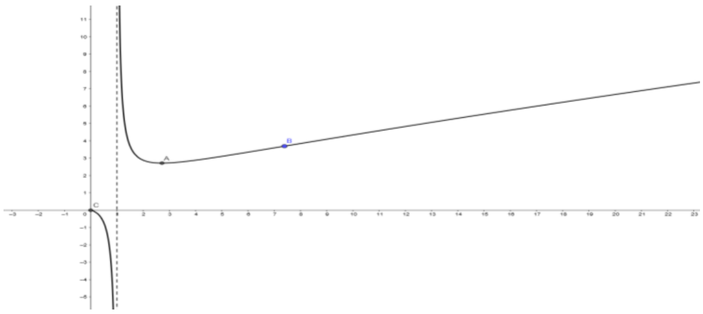
La gráfica de la función no corta a los ejes coordenados.

$f'(x)=\frac{lnx-1}{(lnx)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=e$,

$$\begin{cases} si\ x\in(0,1) & f'(x)<0 & la\ función\ decrece \\ si\ x\in(1,e) & f'(x)<0 & la\ función\ decrece \\ si\ x\in(e,+\infty) & f'(x)>0 & la\ función\ crece \end{cases},$$

La función tiene un mínimo relativo en el punto *A(e, e)*

$f''(x)=\frac{2-lnx}{x(lnx)^3}$, la gráfica tiene un punto de inflexión en el punto $B\left(e^2,\ \frac{e^2}{2}\right)$



(b.2) En la función anterior $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, haciendo $f(x) = a$, se obtiene la ecuación $x - a\ln x = 0$,

Por lo que determinar el número de soluciones de esta ecuación en función de los valores de "a", es determinar el número de intersecciones de la gráfica de la función *f(x)* con la recta horizontal $y = a$.

$$\begin{cases} si\ a \leq 0, & una\ solución\ (*) \\ si\ 0 < a < e, & cero\ soluciones \\ si\ a = e, & una\ solución \\ si\ a > e, & dos\ soluciones \end{cases}$$

(*) Para *a=0* la ecuación queda de la forma *x=0* que tiene solución si bien la función no está definida para *x=0*

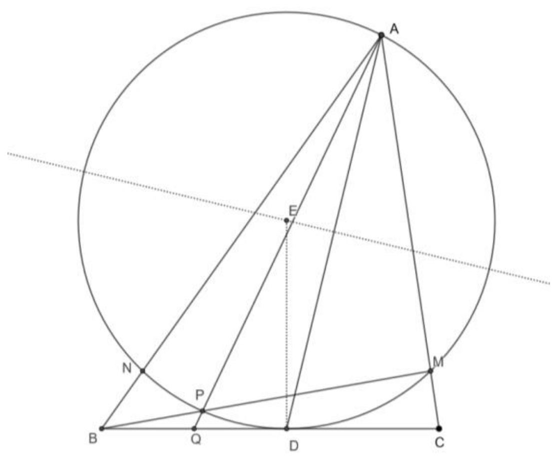
Problema 6.

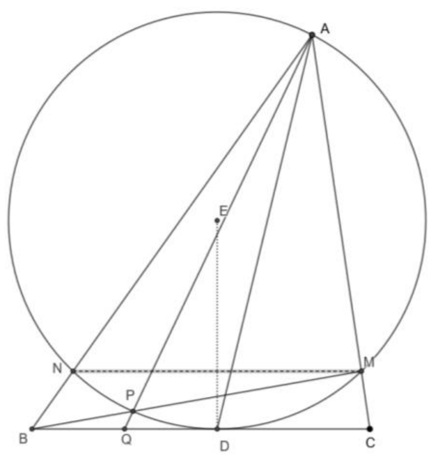
[10 puntos] En un triángulo ΔABC, la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$, corta al lado *BC* en el punto *D*. Sea la circunferencia Γ, que pasa por el punto *A* y es tangente a *BC* en el punto *D*. Si *M* es el otro punto de intersección de Γ con el lado *AC* y la recta *BM* corta a la circunferencia Γ en el punto *P*, demuestre que *AP* es una mediana del triángulo ΔABD.

***Resolución*:**

Sea ΔABC el triángulo de la figura; para dibujar la circunferencia se traza primero la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$, determinando el punto D; a continuación, se traza la perpendicular a lado BC en el punto D y la mediatriz del segmento AD. El punto de corte, E, de ambas rectas es el centro de la circunferencia Γ.

Sea Q el punto de intersección de la recta AP con el lado BC, se trata de demostrar que Q es el punto medio del segmento BD.





Sea N el otro punto de intersección de Γ con el lado *AB.*

Como AD es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DAC$ son iguales.

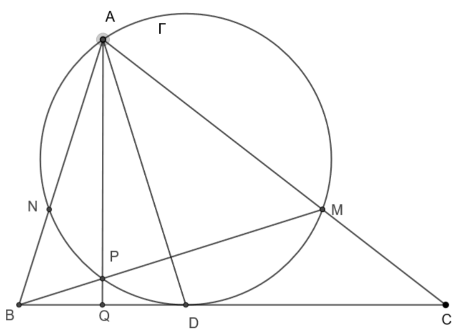
Y se tiene: $\angle BAD = \angle NAD = \angle DAC = \angle DAM$

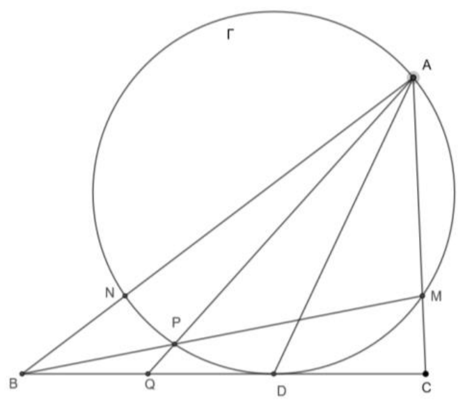
Y los arcos de circunferencia $\widehat{ND}$ y $\widehat{DM}$ son iguales por ser los arcos que abarcan, en la circunferencia Γ , los ángulos inscritos $\angle NAD = \angle DAM$, (La medida en radianes de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la medida en radianes de arco que abarcan sus lados). Como consecuencia el segmento MN es paralelo a lado BC y su mediatriz pasa por el punto D.

En los triángulos ΔABQ y ΔPBQ se verifica que:

1) Los ángulos $\angle BQP = \angle BQA$ por ser coincidentes.
2) El ángulo $\angle PBQ$ es exterior a la circunferencia Γ, (su medida en radianes es igual a la semidiferencia de las medidas en radianes de los arcos que abarcan sus lados):
$$\angle PBQ = \frac{\widehat{DM} - \widehat{PD}}{2} = \frac{\widehat{ND} - \widehat{PD}}{2} = \frac{\widehat{NP}}{2}$$
El ángulo: $\angle BAQ = \angle NAP = \frac{\widehat{NP}}{2}$ por ser inscrito en la circunferencia, y, por tanto:
$$\angle PBQ = \angle BAQ$$

Y por tanto los triángulos ΔABQ y ΔBPQ son semejantes y sus lados proporcionales:





$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$, de las dos primeras se tiene que: $\overline{BQ}^2 = \overline{QP}.\overline{AQ}$

Por otro lado, la potencia del punto Q respecto a la circunferencia viene dada por:

$$Pot(Q, \Gamma) = \overline{QP}.\overline{QA} = \overline{QD}^2$$

Por lo que**:** $\overline{BQ}^2 = \overline{QP}.\overline{AQ} = \overline{QD}^2$, de donde: $\overline{BQ} = \overline{QD}$. c.q.d.